PART3 命題と条件

要点① 命題

「　　　」… 正しいか正しくないかが明確に決まる文や式。

例 「-1 は自然数である」は 命題

「10000 は大きい数である」は 命題

命題が正しいとき，その命題は「　　」

命題が正しくないとき，その命題は「　　」

であるという。

例 「2 は 6 の約数である」は　　の命題である。

「$\sqrt{(-2)^2}=-2$」は　　の命題である。

要点② 命題と条件

「　　　」… 文字を含む文や式のうち，文字のとる値を変えると真偽が変わるもの。

例 「$x>2$」… $x=3$ のとき　　，$x=2$ のとき

x に関する 2 つの条件を

$p：x>3$，$q：x \geqq 0$

とする。命題「$x>3$ ならば $x \geqq 0$」は，p，q を用いると

「p ならば q」

と表される。この命題を，記号「　　」を用いて

「p　　q」

と表すことができる。

「$p \Rightarrow q$」という形の命題において

p をこの命題の「　　　」，q をこの命題の「　　　」

という。命題「$x>3 \Rightarrow x \geqq 0$」においては

条件　　が仮定，条件 x　　が結論

である。

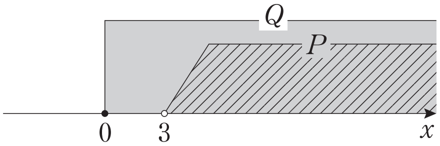
要点③ 命題の真偽と集合

命題「$x>3$ ならば $x\geqq 0$」は真である。これを，集合を用いて考える。

条件 $x>3$ を満たす実数 x 全体の集合を P

条件 $x\geqq 0$ を満たす実数 x 全体の集合を Q

とすると，P　　Q である。これを，数直線で表すと右図のようになる。

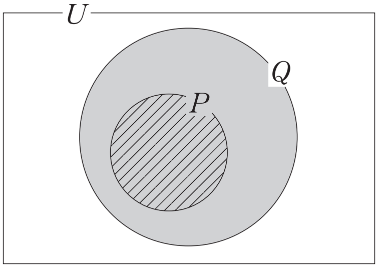


命題「$p\Rightarrow q$」の条件 p，q について，全体集合 U の要素の中で

条件 p を満たすもの全体の集合を P

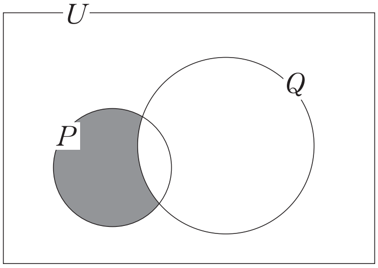
条件 q を満たすもの全体の集合を Q

とすると，命題「$p\Rightarrow q$」が真であることは，p を満たすものはすべて q を満たす，すなわち P　　Q が成り立つことと同じである。



命題「$p\Rightarrow q$」が偽であるのは，仮定 p を満たすが，結論 q を満たさないものが存在するということである。それは，P に属しているが Q に属さない要素，すなわち　　　　　に属する要素が存在する，ということである。

この要素を，この命題の「　　　　」という。



一般的に，命題が偽であることを示すには，反例を1つあげればよい。

例　命題「$x^2=4$ ならば $x=2$」について

$x^2=4$ より $x=2,\ -2$

よって，反例 $x=$　　　が存在するので，この命題は　　　である。

3 (1) 次の命題の真偽を調べよ。ただし，x，y は実数とする。

(i) $x=0$ ならば $xy=0$　　(ii) $x^2=y^2$ ならば $x=y$

(iii) n は 18 の正の約数 $\Rightarrow$ n は 12 の正の約数

(2) 次の命題の真偽を調べよ。ただし，x は実数とする。

(i) $x<2 \Rightarrow x<5$

(ii) $2<x<5 \Rightarrow 3<x<7$

Point Pickup

命題の真偽

命題「$p \Rightarrow q$」について，条件 p を満たすものが

条件 q をすべて満たす …… 命題は真

条件 q を満たさないもの（反例）がある …… 命題は偽

まずは，反例がないかを調べる。

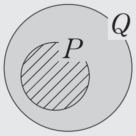
集合を用いた命題の真偽

命題「$p \Rightarrow q$」について，条件 p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とすると

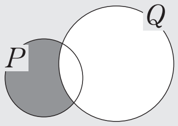
$P \subset Q$ …… 命題は真

$P \cap \overline{Q}$ の要素が存在する …… 命題は偽

$p \Rightarrow q$ は真



$p \Rightarrow q$ は偽



実数の範囲を考えるときは，数直線を活用するとよい。

第 5 講　PART3 確認問題

次の命題の真偽を，①～③のうちから選べ。ただし，x は実数，n は自然数とする。

1　$x=-3$ ならば，$x^2=9$ である。　ア

①　真　　②　偽　　③　真でも偽でもない

2　$x^2=2x$ ならば，$x=2$ である。　イ

①　真　　②　偽　　③　真でも偽でもない

3　n は 10 の正の約数ならば，n は 5 の正の約数　ウ

①　真　　②　偽　　③　真でも偽でもない

4　$x>1 \Longrightarrow x>0$　エ

①　真　　②　偽　　③　真でも偽でもない

5　$-2<x<2 \Longrightarrow 0<x<1$　オ

①　真　　②　偽　　③　真でも偽でもない

PART3 命題と条件

3 (1) 次の命題の真偽を調べよ。ただし，x，y は実数とする。

(i) $x=0$ ならば $xy=0$　　(ii) $x^2=y^2$ ならば $x=y$

(iii) n は 18 の正の約数 $\Rightarrow$ n は 12 の正の約数

(2) 次の命題の真偽を調べよ。ただし，x は実数とする。

(i) $x<2 \Rightarrow x<5$

(ii) $2<x<5 \Rightarrow 3<x<7$

[解答]

(1)(i) $x=0$ のとき　$xy=0\cdot y=0$　　よって真

(ii) $x=1$，$y=-1$ のとき，$x^2=y^2$ であるが，$x=y$ を満たさない。

よって偽（反例　$x=1$，$y=-1$）

(iii) 18 の正の約数は 1，2，3，6，9，18

12 の正の約数は 1，2，3，4，6，12

$n=9$ のとき，n は 18 の正の約数であるが，12 の正の約数ではない。

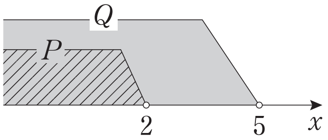
よって偽（反例 $n=9$）

(2)(i) 真

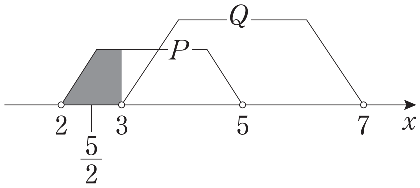
(ii) 偽 （反例 $x=\frac{5}{2}$）

（参考図）

(i)



(ii)



第 5 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

$x=-3$ のとき，$x^2=(-3)^2=9$

よって，

「$x=-3$ ならば $x^2=9$」は真 [A]

[A]　命題が常に成り立つときは真である。

2

[正解] イ：②

[解説]

$x^2=2x$ のとき

$$x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0$$

$$x=0,\ 2$$

よって，

「$x^2=2x$ ならば，$x=2$」は偽 [B]

反例：$x=0$

[B]　1つでも成り立たないものがあるときは，偽となる。

3 **[正解]** ウ：②

[解説]

p：「n は 10 の正の約数」，q：「n は 5 の正の約数」とする。

p を満たす要素全体の集合を P

q を満たす要素全体の集合を Q とすると，

$$P=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$$

$$Q=\{1,\ 5\}$$

$n=2$ のとき，n は 10 の約数であるが，5 の約数ではない。

よって，

「n は 10 の正の約数ならば，n は 5 の正の約数」は**偽** [C]

反例：$n=2$

[C]　1 つでも成り立たないものがあるときは，偽となる。

4 **[正解]** エ：①

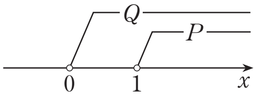
[解説]

p：「$x>1$」，q：「$x>0$」とし，

p を満たす要素全体の集合を P

q を満たす要素全体の集合を Q とすると，

$$P\subset Q$$



よって，

$p \Longrightarrow q$ は**真**である。 [D]

[D]　$p \Longrightarrow q$ が真であることは，$P\subset Q$ が成り立つことと同じである。

5 **[正解]** オ：②

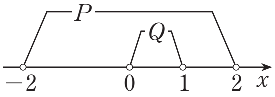
[解説]

p：「$-2<x<2$」，q：「$0<x<1$」とする。

p を満たす要素全体の集合を P

q を満たす要素全体の集合を Q とすると，

$P\subset Q$ でない。 [E]



よって，

$p \Longrightarrow q$ は**偽**である。

[E]　$P\subset Q$ が成り立たないとき，$p \Longrightarrow q$ は偽である。